<table>
<tr><td>Estructuras Algebraicas
Primer examen parcial</td><td rowspan="2">1er Apellido: ______________
2º Apellido: ______________
Nombre: ______________
Número de matrícula: | | | | | | | |</td><td rowspan="2">12 de abril de 2016
Tiempo 2 h.
Calificación:</td></tr>
<tr><td>Departamento Matem. aplic. TIC
ETS de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid</td></tr>
</table>

1. (2 puntos)

   a) Determinar el orden de $\tau \in S_9$: $\tau = (8,9,5,1,6)(1,3)(2,7)(3,5,1)(3,6)$

   b) Obtener justificadamente un elemento de $(\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{12},\ +_{20} \times +_{12})$, de orden 30.

   c) Obtener justificadamente una permutación $\sigma \in S_{12}$, que sea par y de orden 12.

   d) Indicar el número de posibles grupos abelianos, salvo isomorfismos, de orden 12 y mostrar en cada uno de ellos un elemento de orden 4, si existe.

   e) Indicar si el homomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definido por $\varphi((a,b)) = a - 3b$ es suprayectivo o inyectivo.

2. (3 puntos) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano. Demostrar o refutar con un contraejemplo (es decir, poner un ejemplo en el que no se verifique), si es cierto que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, es $H = \{g \in G \,:\, g^n = e_G\} \leq G$ y si es $H \trianglelefteq G$. Repetir el estudio en el caso de que $(G, *)$ sea un grupo no abeliano.

3. (3 puntos) Se considera la aplicación $\phi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ definida del siguiente modo:

$$\phi\left(([a]_4, [b]_2, [c]_8)\right) = ([a-2b]_4, [c-2b]_4)$$

   Demostrar que ϕ está bien definida y que es un homomorfismo de grupos.
   Calcular la imagen y el núcleo de ϕ.

4. (2 puntos) Para cada uno de los siguientes grupos cocientes, determinar a qué producto de grupos cíclicos son isomorfos.

   a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 / \langle([2]_4, [1]_2, [2]_8)\rangle$.

   b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle(3,1)\rangle$.

Solución:

1. *a*) $|\tau| = 4$

   b) Por ejemplo: $([4]_{20}, [2]_{12})$

   c) Por ejemplo: $(1,2,3,4,5,6)(7,8,9,10)$

   d) Hay dos grupos posibles, salvo isomorfismos:
   $\mathbb{Z}_{12}$ con $[3]_{12}$ de orden 4, y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ que no tiene elementos de orden 4.

   e) $\varphi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$: φ es suprayectivo, $\ker(\varphi) = \langle (3,1) \rangle$ por tanto no es inyectivo.

2. - Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y sea $(G,*)$ grupo abeliano:

     a) Puesto que $e_G^n = e_G$ se deduce que $e_G \in H$ y $H \neq \emptyset$

     b) Para todos $a,b \in H$ es $a^n = e_G$ y $b^n = e_G \Rightarrow$ (por ser G abeliano) $(ab)^n = a^n b^n = e_G e_G = e_G$
     $\Rightarrow ab \in H$

     c) Para todo $a \in H$ es $a^n = e_G \Rightarrow (a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e_G^{-1} = e_G \Rightarrow a^{-1} \in H$

     Se deduce que $H \leq G$. Ademas, por ser $(G,*)$ grupo abeliano es $H \trianglelefteq G$

   - Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y sea $(G,*)$ grupo no abeliano:
     En este caso el resultado general no es cierto. Por ejemplo sea $(G,*) = (D_3, \circ)$ y $n = 2 \Rightarrow$
     $H = \{g \in D_3 : g^2 = e\} = \{e, s, gs, g^2 s\}$, que no es subgrupo de D_3 puesto que $(g^2 s)s = g^2 \notin H$

3. *a*) ϕ está bien definida:
   $([a]_4, [b]_2, [c]_8) = ([a']_4, [b']_2, [c']_8) \Rightarrow a = a' + 4h_1, b = b' + 2h_2$ y $c = c' + 8h_3 \Rightarrow$
   $a - 2b = a' - 2b' + 4(h_1 - h_2)$ y $c - 2b = c' - 2b' + 4(2h_3 - h_2) \Rightarrow [a-2b]_4 = [a' - 2b']_4$ y
   $[c - 2b]_4 = [c' - 2b']_4 \Rightarrow \phi(([a]_4, [b]_2, [c]_8)) = \phi(([a']_4, [b']_2, [c']_8))$

   b) ϕ es homomorfismo de grupos:
   $\phi(([a_1]_4, [b_1]_2, [c_1]_8) + ([a_2]_4, [b_2]_2, [c_2]_8)) = \phi(([a_1 + a_2]_4, [b_1 + b_2]_2, [c_1 + c_2]_8)) = ([(a_1 + a_2) - 2(b_1 + b_2)]_4, [(c_1 + c_2) - 2(b_1 + b_2)]_4) = ([(a_1 - 2b_1) + (a_2 - 2b_2)]_4, [(c_1 - 2b_1) + (c_2 - 2b_2)]_4)$
   $= ([a_1 - 2b_1]_4, [c_1 - 2b_1]_4) + ([a_2 - 2b_2]_4, [c_2 - 2b_2]_4) = \phi(([a_1]_4, [b_1]_2, [c_1]_8)) + \phi(([a_2]_4, [b_2]_2, [c_2]_8))$

   c) Imagen y núcleo: $\phi(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\ker(\phi) = \langle ([2]_4, [1]_2, [2]_8) \rangle$

4. *a*) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 / \langle ([2]_4, [1]_2, [2]_8) \rangle \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

   b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle (3,1) \rangle \approx \mathbb{Z}$